Szilárd testek alakváltozása

A mozgás leírására használt modellek közül eddig a tömegpont-, a pontrendszer- és a merev test-modellel foglalkoztunk. A merev test-modell már figyelembe veszi a valóságos testeknek azt a lényeges sajátságát, hogy nem pontszerűek, hanem kiterjedtek, és lehetőséget ad az ezzel kapcsolatos új mozgási lehetőségek leírására is. De a valóságos testnek a merev test is eléggé durva közelítése, hiszen ez a modell változatlan alakot (és ezzel változatlan térfogatot) tételez fel, és tudjuk, hogy ha a testeket külső hatás éri, akkor az alakjuk és a térfogatuk is megváltozhat.

Valóságosabb – de egyben bonyolultabb – modellekhez jutunk, ha *alakváltozást, deformációt* is feltételezünk. A deformálható testek durván két nagy csoportba oszthatók: vannak testek, amelyek többé-kevésbé meghatározott alakkal rendelkeznek, ezek a „hétköznapi értelemben" vett *szilárd testek*[1], és vannak olyanok, amelyeknek nincs saját alakjuk, ezek a *folyadékok* és a *gázok*.

A deformálható testek viselkedésének leírására alapvetően két módszer használható. Az egyik megközelítés az anyag atomos szerkezetéből indul ki, és ennek felhasználásával írja le a test viselkedését. Ez a *mikroszkopikus módszer* azonban az esetek többségében nagyon bonyolult, és legtöbbször nincs is szükség arra, hogy a jelenségeket az atomok mozgására vezessük vissza. A másik, a gyakorlatban legtöbbször használt eljárás a *makroszkopikus*-, vagy *fenomenológiai módszer*, amely feltételezi, hogy a testet alkotó anyagnak nincs belső szerkezete, a test tömege folytonosan tölti ki a test térfogatát, és a test sajátságait tapasztalatból vett anyagi állandókkal veszi figyelembe. A deformálható testek vizsgálatánál itt a fenomenológiai módszert követjük.

Egy deformálható test mozgásának elméleti leírásánál a feladat az, hogy adott külső hatás esetén meghatározzuk a test pontjainak mozgását. A problémát az okozza, hogy ebben az esetben nem csak a testet, mint egészet kell vizsgálni, hanem a test pontjainak egymáshoz viszonyított mozgását, vagyis a test alakváltozását, deformációját is.

A test egyes pontjainak elmozdulását és sebességét elméleti úton úgy határozhatjuk meg, hogy a testet felosztjuk igen kis térfogatelemekre, és számba vesszük az egyes térfogatelemek kölcsönhatásából származó, a térfogatelemek felülete mentén működő *felületi erőket* és a térfogatelemek egészére ható, a térfogatelem térfogatával (illetve tömegével) arányos ún. *térfogati erőket*. Ezután felírjuk az egyes térfogatelemek mozgásegyenletét, majd a térfogatelemekre történő összegzéssel megkapjuk a deformálható test *mozgásegyenleteit*. Ezek általában bonyolult differenciálegyenletek, amelyeknek megoldása – a külső hatás jellegétől, a test tulajdonságaitól és a test alakjától függően – igen bonyolult lehet.

A deformálható testek közül először a merev testekhez legközelebb álló, deformálható szilárd testekkel foglalkozunk. Mivel a testnek, mint egésznek a mozgását le tudjuk írni a merev testekre kidolgozott módszerekkel, itt csak a testek alakváltozását, deformációját tárgyaljuk.

A deformálható szilárd testek alakváltozása kétféle lehet

- a *rugalmas alakváltozás* során a test külső hatásra bekövetkező alakváltozása a hatás megszűntekor megszűnik, a maradó alakváltozás elhanyagolható. Az ilyen módon viselkedő testeket *rugalmas testeknek* nevezik.
- a *maradó*- vagy *plasztikus alakváltozás* során a test az alakváltoztató hatás megszűnte után eredeti alakját nem nyeri vissza, az alakváltozás részben megmarad. Az alakváltozási

---

[1] A fizikában szilárd test alatt gyakran kristályos anyagot értenek, itt ezt a kifejezést általánosabb értelemben használjuk.

„hajlam" növekedésével az ilyen testek viselkedése egyre inkább a folyadékokéhoz hasonlít.

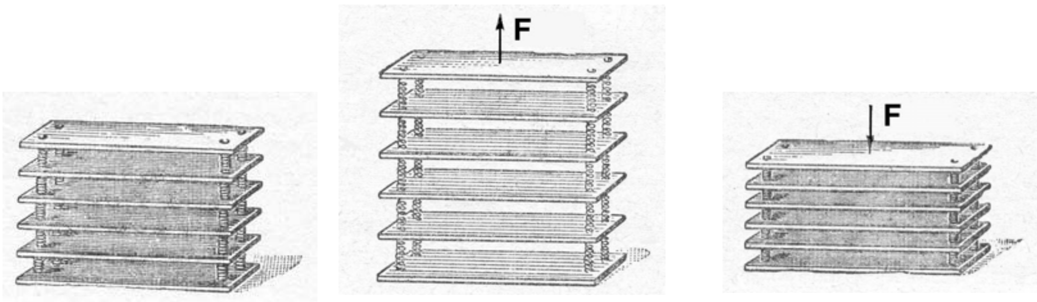
Az alakváltozás általános elméleti leírása általában nehéz. A leírást egyszerűbbé teszi, ha a test *rugalmas*, vagyis külső hatásra megváltoztatja az alakját, de a hatás megszűnése után az eredeti alakja visszaáll, tehát nincs maradó alakváltozás. Annak ellenére, hogy tökéletesen rugalmas test a valóságban nincs, ez a modell nagyon sok esetben jól használható a valóságos testek viselkedésének leírására, mert a maradó alakváltozás gyakran *elhanyagolható*.
További egyszerűsítést jelent, ha a test anyaga *homogén* és *izotróp*, vagyis a test tulajdonságai nem függnek sem a helytől sem az iránytól.
A továbbiakban elsősorban *ideálisan rugalmas* viselkedésű, *homogén, izotróp* testekkel foglalkozunk.

Rugalmas alakváltozás

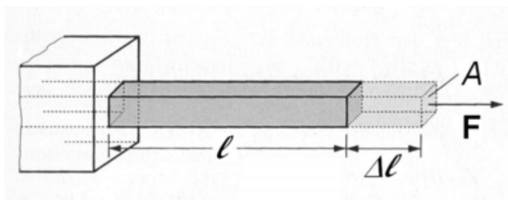
A rugalmas test alakját valamilyen külső hatás változtatja meg. A létrejött alakváltozás következtében a test belsejében *rugalmas erők* lépnek fel, ezek adják a bevezetőben említett felületi erőket, amelyek a mozgásegyenletben szerepelnek. A deformálható test mozgásegyenletei azonban még homogén, izotróp, rugalmas anyag esetében is bonyolult differenciálegyenletek.
Könnyebb a helyzet, ha csak a testnek a külső hatás következtében létrejött új *egyensúlyi állapotára* vagyunk kíváncsiak. Mivel a külső hatás által a test belsejében ébresztett rugalmas erők a külső hatás ellenében hatnak, és a deformáció növekedésével nőnek, egy bizonyos – a külső hatástól függő – alakváltozás esetén egyensúlyi állapot alakul ki. Az egyensúlyi állapotra vonatkozó alapegyenletek a mozgásegyenletekből származtathatók. Sajnos általában ezek az egyenletek is eléggé bonyolultak. Ilyen egyenletek felírásával és megoldásával foglalkozik az *elméleti rugalmasságtan*, amivel később a *Mechanika* tárgyban találkoznak.
Szerencsére vannak olyan alakváltozások, amelyeknél az új egyensúlyi állapotban a test pontjainak helyzete viszonylag egyszerű összefüggéssel kifejezhető, és az alakváltozásnak a külső hatással való összefüggése is egyszerűen megadható. Ezekben az esetekben az alakváltozás rendszerint kísérleti úton is könnyen nyomon követhető. Az egyszerű deformációk közül különösen fontos a *nyújtás* illetve *összenyomás* és a *nyírás*, mert egy homogén, izotróp rugalmas test minden alakváltozása visszavezethető erre a két alakváltozásra. További, egyszerűbb alakváltozások a minden oldalról történő összenyomás, amit *kompressziónak* is neveznek, továbbá a *hajlítás* és a *csavarás*. A továbbiakban ezekkel az egyszerű alakváltozásokkal foglalkozunk.

Nyújtás és összenyomás

Ha egy hosszú, mindenütt azonos keresztmetszetű testet egyik végén rögzítünk, a másik végén pedig a keresztmetszetére merőleges erőt fejtünk ki, akkor megváltozik a testnek az erővel párhuzamos hossza. Az eközben bekövetkező alakváltozást szemlélteti a mellékelt



ábra, ahol a rugalmas test-modell rugókkal összekapcsolt síkokból áll (baloldali ábra). A síkok az alakváltozás szemléletesebbé tételét szolgálják. A modell-test alsó síkja rögzített, az erő a felső határoló síkra merőleges. A nyújtás (középső ábra) és összenyomás (jobboldali ábra) esetén a síkok egymással párhuzamosak maradnak, de megváltozik az egymástól mért távolságuk (ábra).
A nyújtás és összenyomás során bekövetkező alakváltozás és az alkalmazott erő közötti összefüggést legegyszerűbben mérés segítségével állapíthatjuk meg. Ha egy hosszú, vékony, mindenütt azonos keresztmetszetű rúd vagy szál



egyik végét befogjuk, a másikat a rúd irányában, a keresztmetszetére merőlegesen ható F nagyságú erővel meghúzzuk, akkor a rúd hossza megnő (ábra). Nem túl nagy $\Delta\ell$ hosszváltozásnál a tapasztalat szerint a hosszváltozás arányos az erővel, az eredeti hosszal (ℓ), fordítva arányos a keresztmetszettel (A):

$$\Delta\ell \sim \frac{F\ell}{A}.$$

Az alakváltozás jellemzésére érdemes bevezetni a relatív hosszváltozást megadó $\varepsilon = \frac{\Delta\ell}{\ell}$ *deformációt*, a külső hatást pedig célszerű a keresztmetszetre merőlegesen ható erő és a keresztmetszet $\sigma = \frac{F}{A}$ hányadosával jellemezni. Ezekkel a mennyiségekkel a fenti arányosság az egyszerűbb $\sigma \sim \varepsilon$ alakba írható. Az összefüggést általában a

$$\sigma = E\varepsilon$$

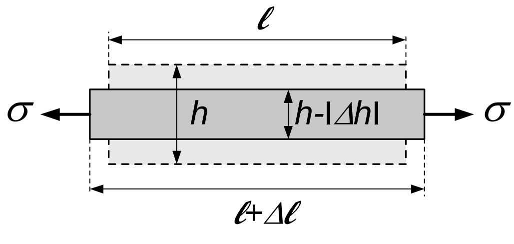
alakban használják, ahol az E arányossági tényező a *Young-modulus*[1], ami kísérleti úton határozható meg. A Young-modulus adott külső körülmények (pl. adott hőmérséklet) mellett a tapasztalat szerint csak az anyagi minőségtől függ. Ugyanez az összefüggés érvényes a rúd összenyomásakor is, csak ekkor $\Delta\ell$ rövidülést jelent.

Az itt bevezetett σ mennyiséget (felületre merőleges erő és a felület hányadosa) általában *normális feszültségnek* nevezik, nyújtás esetén használatos még a *húzófeszültség*-, összenyomásnál pedig a *nyomás* elnevezés. A nyomás jelölésére σ helyett rendszerint a p szimbólumot használják.

A rugalmas testek kismértékű alakváltozásánál általában is érvényes, hogy az alakváltozást jellemző mennyiség (deformáció) a külső hatást jellemző mennyiséggel (feszültség) *lineáris kapcsolatban* van. Ez a tapasztalati összefüggés a *Hooke-törvény*[2], amely esetünkben a $\sigma = E\varepsilon$ alakot ölti. (Az ilyen viselkedést kifejező összefüggés a gyakorlatban igen különböző konkrét alakokat ölthet, de rendszerint valamennyit Hooke-törvénynek nevezik.)

Haránt összehúzódás és -tágulás

Ha a rúd nyújtásánál vagy összenyomásánál bekövetkező alakváltozást pontosabban megvizsgáljuk, akkor azt találjuk, hogy a rúd haránt irányú mérete is megváltozik, ami a rúd húzásánál *haránt összehúzódást*, a rúd összenyomásánál pedig *haránt tágulást* jelent (az ábrán a haránt összehúzódás látható, az áttekinthetőség kedvéért nem méretarányosan).



A tapasztalat szerint a haránt irányú méret megváltozása (Δh) arányos az eredeti mérettel (h) és a relatív hosszváltozással, csak az előjele ellenkező (nyújtásnál összehúzódás, összenyomásnál tágulás):

$$\Delta h = -\mu h \frac{\Delta\ell}{\ell} = -\mu h \varepsilon .$$

Az összefüggés szokásosan használt alakja

$$\frac{\Delta h}{h} = -\mu \frac{\Delta\ell}{\ell} .$$

[1] Thomas YOUNG (1773-1829) angol fizikus
[2] Robert HOOK (1635-1703) angol fizikus

A μ arányossági tényező az anyagi minőségtől függő állandó, a *Poisson-szám*[1].

Térfogatváltozás nyújtásnál

Egy rúd nyújtásánál a rúd térfogata is megváltozik. Példaként egy ℓ hosszúságú, *hxh* keresztmetszetű hasábot vizsgálunk, amelynek méretei az alakváltozás után az $\ell + \Delta\ell$ illetve $h+\Delta h$ értéket veszik fel. A térfogatváltozás:

$$\Delta V = (\ell + \Delta\ell)(h+\Delta h)^2 - \ell h^2 = \ell h^2 + 2\ell h\Delta h + \ell\Delta h^2 + h^2\Delta\ell + 2\Delta\ell h\Delta h + \Delta\ell\Delta h^2 - \ell h^2$$

amiből – a másod- és harmadrendűen kicsi tagok elhanyagolása után – a

$$\Delta V \approx 2\ell h\Delta h + h^2\Delta\ell = \ell h^2\left(2\frac{\Delta h}{h} + \frac{\Delta\ell}{\ell}\right) = V\left(2\frac{\Delta h}{h} + \frac{\Delta\ell}{\ell}\right)$$

összefüggést kapjuk.

Mivel

$$\frac{\Delta h}{h} = -\mu\frac{\Delta\ell}{\ell},$$

a térfogatváltozás

$$\Delta V \approx V\frac{\Delta\ell}{\ell}(1-2\mu),$$

a relatív térfogatváltozás pedig

$$\frac{\Delta V}{V} \approx (1-2\mu)\frac{\Delta\ell}{\ell}.$$

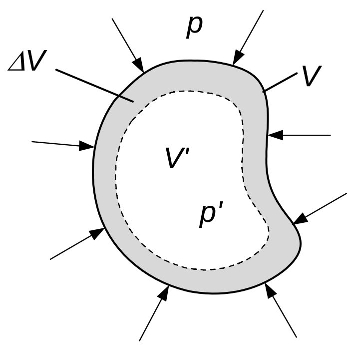
Ha $\frac{\Delta\ell}{\ell}$-t kifejezzük a megnyúlást okozó feszültséggel, akkor a

$$\frac{\Delta V}{V} \approx \frac{(1-2\mu)}{E}\sigma$$

összefüggést kapjuk. A relatív térfogatváltozás – a várakozásnak megfelelően – arányos a feszültséggel és a nyújtást és haránt összehúzódást jellemző két rugalmas állandótól függ.

Térfogatváltozás minden oldalról történő összenyomásnál (kompresszió)

Ha egy testet minden oldalról ható, a felület minden pontján azonos nyomásnak (p) teszünk ki (ábra), akkor ehhez a nyomáshoz tartozik egy meghatározott egyensúlyi térfogat (V). Ha a nyomást megnöveljük ($p' = p + \Delta p$), akkor lecsökken a test térfogata ($V' = V - \Delta V$). A tapasztalat szerint a térfogatváltozás arányos a Δp nyomásváltozással és az eredeti V térfogattal



$$\Delta V \sim V\Delta p,$$

vagyis érvényes a Hooke-törvény.

Az arányossági tényező egy anyagállandó, a *kompresszibilitás*, amelynek jelölésére leggyakrabban a κ szimbólumot használják. Az előjeleket is figyelembe véve, a Hooke-törvény itt a

$$\frac{\Delta V}{V} = -\kappa\Delta p$$

alakba írható.

---

[1] Siméon Denis POISSON (1781-1840) francia matematikus és fizikus

A fenti összefüggést gyakran a

$$\Delta p = -\frac{1}{\kappa}\frac{\Delta V}{V} = -K\frac{\Delta V}{V}$$

alakban használják, ahol $K = \frac{1}{\kappa}$ a *kompressziómodulus*.

Példaként egy ℓ élhosszú kocka kompresszióját számítjuk ki.
Feltételezzük, hogy érvényes a *szuperpozíció elve*, így a teljes térfogatváltozást a három lappárra ható nyomás miatt fellépő térfogatváltozások összegeként számítjuk ki:

$$\Delta V = 3\Delta V_{lin} = -3V(1-2\mu)\frac{\Delta\ell}{\ell} = -3V(1-2\mu)\frac{\Delta F}{AE} = -3V(1-2\mu)\frac{\Delta p}{E} .$$

Ebből

$$\frac{\Delta V}{V} = -3\frac{1-2\mu}{E}\Delta p ,$$

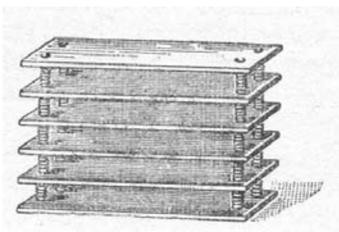
vagyis a kompressziómodulus kifejezhető a korábban bevezetett 2 állandóval:

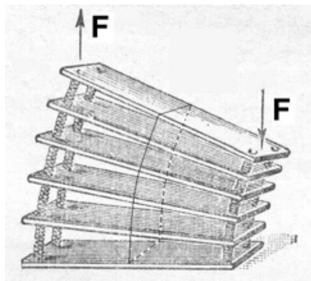
$$\kappa = 3\frac{1-2\mu}{E} .$$

Mivel $\Delta p > 0$-nál $\Delta V < 0$, a Poisson-számra fennáll, hogy $\mu < \frac{1}{2}$.

Hajlítás

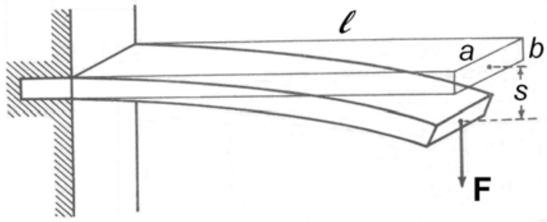
A hajlítással részletesebben nem foglalkozunk, csupán megpróbáljuk szemléltetni, hogy mi történik, ha egy egyik végén rögzített hasábot meghajlítunk. A mellékelt ábrán az alakváltozást a rugókkal összekapcsolt síkokból álló modellen szemléltetjük. A hasáb alsó síkja rögzített, a hajlítást az ábrán jelzett erőkkel hozzuk létre. Ezek hatására a test meghajlik, jobboldalán a síkok távolsága lecsökken, tehát a test itt összenyomódik, a baloldalon viszont a síktávolság nő, tehát itt a test megnyúlik. Mivel a síktávolság jobbról balra egyenletesen nő, középen a síkok távolsága az eredeti, deformálatlan állapotnak felel meg (ábra). Ettől a változatlanul maradt ún. *neutrális síktól* jobbra összenyomás-, attól balra nyújtás következik be. Az ábra alapján sejthető, hogy a hajlítás nyújtásra és összenyomásra vezethető vissza. A részletesebb elemzések, amelyeket itt nem tárgyalunk, valóban igazolják ezt a sejtést.





A kísérletek és számítások azt mutatják, hogy ha egyik végén rögzített rudat a másik végén a rúdra merőleges F erővel hajlítunk (ábra), akkor a rúd végének s lehajlása az alábbi összefüggéssel számítható ki:

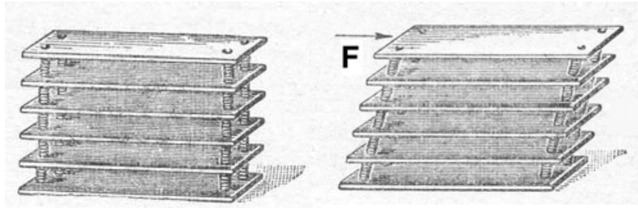
$$s = \frac{4}{E}\frac{\ell^3}{ab^3}F .$$



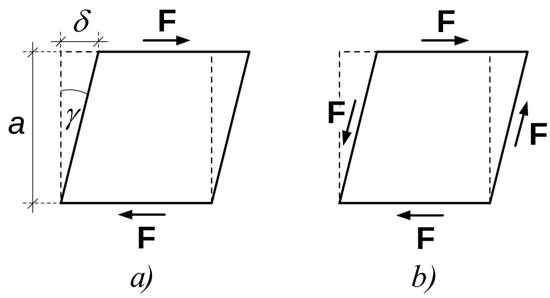
Látható, hogy a lehajlás kiszámításához az anyagállandók közül csak az E Young-modulusra van szükség. Ennek éppen az a magyarázata, hogy a hajlítás visszavezethető a rúd külső ívén alkalmazott nyújtásra és a belső íven alkalmazott összenyomásra.

Nyírás

A nyírást legegyszerűbben egy téglatest alakú hasábon lehet bemutatni. Egy alapjánál rögzített hasáb nyírása olyan erő hatására következik be, amely a rögzített alappal szemközti felületre hat, és a felülettel párhuzamos. Ezt az alakváltozást mutatja a korábban is használt modell segítségével a mellékelt ábra, ahol az alakváltozást a rugókkal összekapcsolt síkok elmozdulása szemlélteti. A tiszta nyírásnál a síkok egymással párhuzamosak maradnak, sőt a távolságuk sem változik, de a síkok mentén elcsúsznak egymáshoz képest. A modell-test felső síkjára ható, a síkkal párhuzamos erő a *nyíróerő*.



A hasábra ható erőket oldalnézetben mutatja a következő ábra. Az erő párhuzamos a felülettel, amire hat (*a)* ábra), a rögzítés hatását itt egy erővel helyettesítettük. A valóságban egyensúlyi állapotban a nyírás hatására két másik erő is fellép, mert a test csak akkor van egyensúlyban, ha az erők és a forgatónyomatékok eredője is nulla (*b)* ábra).



Az alakváltozást a $\gamma = \dfrac{\delta}{a}$ relatív elmozdulással jellemezhetjük, amit *nyírási deformációnak* neveznek (ez kis elmozdulásnál az ábrán látható γ szöggel egyenlő). A külső hatás jellemzésére a felülettel párhuzamos F nyíróerő és az A felület $\tau = \dfrac{F}{A}$ hányadosát használhatjuk. Azt így definiált τ mennyiséget *nyírófeszültségnek* nevezik. A tapasztalat szerint kis deformációk esetén ebben az esetben is érvényes a Hooke-törvény, vagyis a τ nyírófeszültség és a γ nyírási deformáció között lineáris összefüggés van

$$\tau = G\gamma \ .$$

Itt G az anyagi minőségtől függő *nyírási-* vagy *torziómodulus*, amelyet kísérleti úton lehet meghatározni.

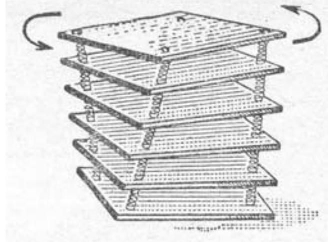
Kimutatható, hogy

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)},$$

vagyis ez az anyagállandó is visszavezethető a korábban bevezetett kettőre.

Csavarás

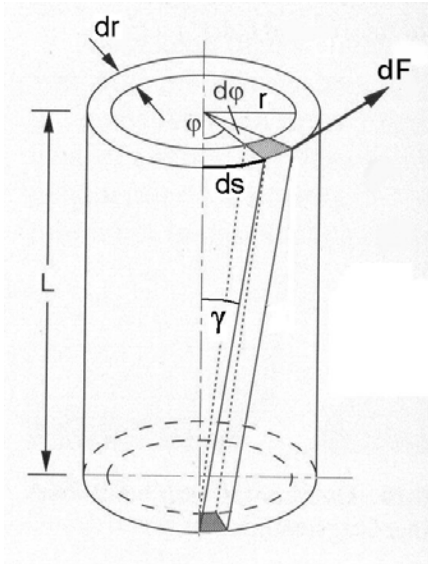
Bár a derékszögű hasáb nem a legalkalmasabb a tiszta csavarás bemutatására, szemléletessége miatt erre a célra mégis a már ismert modellt használjuk (ábra). A csavarást az ábrán látható forgatással hozhatjuk létre. Tiszta csavarás során a síkok egymással párhuzamosak maradnak, egymáshoz viszonyított távolságuk sem változik, de egymáshoz képest két irányban is elcsúsznak. Ebből sejthető, hogy a tiszta csavarás nyírásra vezethető vissza.



A csavarás legegyszerűbb esete az, amikor egyik végén rögzített hengeres test másik végére a henger tengelyével párhuzamos forgatónyomaték hat. Ekkor a hengeres test csavaró hatásnak kitett vége elcsavarodik. A tapasztalat azt mutatja, hogy az elcsavarodás φ szöge arányos az M csavaró forgatónyomatékkal

$$M \sim \varphi \frac{a^4}{L}$$

(itt a a henger sugara, L a hossza). A pontos összefüggést nem túl bonyolult elméleti megfontolásokkal le is tudjuk vezetni.
Válasszunk ki a hengeres testben egy r sugarú, elemi dr vastagságú henger-héjat (ábra). Ennek deformációja a síkká kiterített, L magasságú henger-héj Δs elmozdulással járó nyírásának felel meg. A nyírási szög:



$$\gamma = \frac{ds}{L} = \frac{r}{L}\varphi .$$

A nyírott felület $dA = 2r\pi dr$, a nyíróerő

$$dF = \tau dA = G\gamma dA = G\frac{r}{L}\varphi 2 r\pi dr .$$

Az elemi forgatónyomaték

$$dM = rdF = G2\pi\frac{\varphi}{L}r^3 dr ,$$

a teljes hengerre ható forgatónyomaték pedig

$$M = 2\pi G\frac{\varphi}{L}\int_0^a r^3 dr = \pi G\frac{a^4}{2L}\varphi .$$

A kapott összefüggés egyezik a tapasztalattal.

Ha a szokásnak megfelelően bevezetjük a

$$D^* = \frac{\pi G a^4}{2L}$$

jelölést, akkor a szögelfordulás és a forgatónyomaték összefüggése az egyszerűbb

$$M = D^*\varphi$$

alakba írható. (Ezt az összefüggést használtuk fel a merev testeknél tárgyalt torziós inga rezgésének tárgyalásánál.)
A D^* együttható (amit gyakran direkciós nyomatéknak neveznek) az anyagállandók közül csak a nyírási modulust tartalmazza, annak megfelelően, hogy a csavarást visszavezettük a nyírásra.
A rugalmas állandók összefüggése
Láttuk, hogy homogén, izotróp rugalmas test esetén a bevezetett 4 rugalmas állandó (E, μ, κ, G) között két összefüggés van:

$$\kappa = 3\frac{1-2\mu}{E}$$

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)} .$$

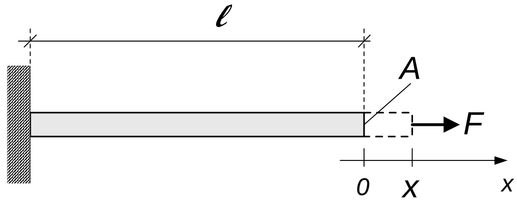
Ez azt jelenti, hogy az ilyen test rugalmas viselkedését *két rugalmas állandó* meghatározza.
A rugalmas állandók a kérdéses anyagból készült megfelelő próbatesteken mérhetők (később a laboratóriumban ilyen mérésekre sor kerül). Így például E a korábban felírt összefüggések alapján vékony rúd, vagy szál megnyúlásából- vagy egy rúd lehajlásából-, G ugyancsak az itt tárgyalt összefüggés segítségével egy rúd csavarásából- vagy egy rúdra vagy szálra

felfüggesztett korong torziós rezgéséből határozható meg (torziós inga). Az E és G ismeretében μ és κ a fenti összefüggésekből kiszámítható.

Rugalmas energia

Egy test deformálásához munkát kell végezni. A rugalmas test azonban a deformáló hatás megszűnte után visszanyeri eredeti alakját, és eközben ugyanakkora munkát képes elvégezni, mint amit a deformáló erő végzett rajta. Ez azt jelenti, hogy a deformált rugalmas testnek egyértelműen meghatározott munkavégző képessége, helyzeti energiája van, amit *rugalmas energiának* neveznek. Most meghatározzuk a rugalmas energiát két speciális esetben.

Először kiszámítjuk egy mindenütt azonos keresztmetszetű rugalmas rúd megnyújtásakor végzett munkát, aminek nagysága megegyezik a megnyújtott test rugalmas energiájával. Az ábrán látható A keresztmetszetű, ℓ hosszúságú rudat x értékkel megnyújtott állapotban látjuk, ekkor a rudat nyújtó erő



$$F = EA\varepsilon = EA\frac{x}{\ell} \ .$$

További elemi dx megnyújtáshoz

$$dW = Fdx = EA\frac{x}{\ell}dx$$

munkát kell végezni.

A 0 és egy véges x érték közötti megnyújtás során végzett W munkát, és egyúttal az E_{rug} rugalmas energiát az elemi munkák összegzésével, vagyis integrálással kapjuk meg:

$$W = E_{rug} = \int_0^x F(x)dx = \frac{EA}{\ell}\int_0^x xdx = \frac{1}{2}\frac{EA}{\ell}x^2 \ .$$

Bevezetve a $D = \frac{EA}{\ell}$ jelölést, az x távolsággal megnyújtott rúd rugalmas energiájára az

$$E_{rug} = \frac{1}{2}Dx^2$$

összefüggést kapjuk. Itt feltételeztük, hogy a Hooke-törvény a deformáció során mindig érvényes.

A rugalmas energiára kapott kifejezést úgy is átalakíthatjuk, hogy a megnyúlás helyett a deformáció szerepeljen benne. Felhasználva a deformáció definícióját, az elemi munkavégzés az alábbi alakba írható:

$$dW = dE_{rug} = EA\frac{x}{\ell}dx = EA\ell\frac{x}{\ell}\frac{dx}{\ell} = EA\ell\varepsilon d\varepsilon = EV\varepsilon d\varepsilon \ ,$$

ahol $V = A\ell$ a test térfogata.

A 0-tól ε értékig deformált rúd rugalmas energiája tehát

$$E_{rug} = EA\int_0^\varepsilon \varepsilon d\varepsilon = \frac{1}{2}E\varepsilon^2 V \ .$$

A rugalmas energia térfogati sűrűsége

$$w_{rug} = \frac{E_{rug}}{V} = \frac{1}{2}E\varepsilon^2 \ ,$$

ami az anyagi minőségen (az E Young-moduluson) kívül csak a test ε deformációjától függ.

A rugalmas energia természetesen kifejezhető az alkalmazott feszültséggel is, ha felhasználjuk a $\sigma = E\varepsilon$ összefüggést. Így a rugalmas energia újabb kifejezéseit kaphatjuk:

$$w_{rug} = \frac{1}{2} E\varepsilon^2 = \frac{1}{2E}\sigma^2 = \frac{1}{2}\sigma\varepsilon .$$

Hasonló módon kaphatjuk meg a rugalmas energiát egy téglatest alakú rugalmas test nyírása esetén is. Egy A keresztmetszetű, h magasságú hasáb nyírásánál az erő

$$F = \tau A = G\gamma A ,$$

az elemi elmozdulás

$$dx = hd\gamma ,$$

így a nyíróerő elemi munkája

$$dW = Fdx = GAh\gamma d\gamma = G\gamma d\gamma V$$

($V = Ah$) a test térfogata).
A rugalmas energia

$$E_{rug} = GV\int_0^{\gamma}\gamma d\gamma = \frac{1}{2} G\gamma^2 V ,$$

a rugalmas energia térfogati sűrűsége pedig

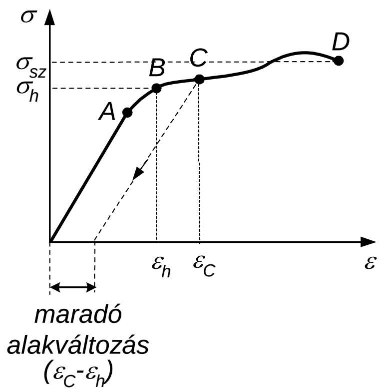
$$w_{rug} = \frac{1}{2} G\gamma^2 .$$

A rugalmas energiát itt az anyag G nyírási modulusa mellett a test γ nyírási deformációja szabja meg. További kifejezések a $\tau = G\gamma$ összefüggéssel kaphatók:

$$w_{rug} = \frac{1}{2} G\gamma^2 = \frac{1}{2G}\tau^2 = \frac{1}{2}\tau\gamma .$$

Maradó (plasztikus) alakváltozás

Eddig feltételeztük, hogy a vizsgált test rugalmas, sőt azt is, hogy alakváltozásánál érvényes a Hooke-törvény, vagyis a deformáció arányos a deformációt okozó feszültséggel. A tapasztalat szerint ez eléggé kis deformációk esetén teljesül.
A deformáció növelésével azonban a test alakváltozása először a Hooke-törvénytől tér el, tehát a deformáció rugalmas marad, de nem arányos a feszültséggel, majd *maradó alakváltozás* lép fel.
Ha egy ismert hosszúságú és keresztmetszetű test nyújtása során mérjük az erőt és a hosszváltozást, majd kiszámítjuk a σ feszültséget és az ε deformációt, felrajzolhatjuk a test nyújtására vonatkozó *feszültség-deformáció (σ–ε) görbét*. Ez a görbe fontos információkat ad a vizsgált anyag alakváltozási tulajdonságaira vonatkozóan. A mellékelt ábra egy ilyen görbét mutat sematikusan.



Az *A* pontig az alakváltozás követi a Hooke-törvényt, az *A*-*B* szakaszon az alakváltozás még rugalmas, tehát a feszültség megszűnése után a deformáció eltűnik, de a $\sigma \sim \varepsilon$ arányosság már nem érvényes. A *B* ponthoz tartozik az a legnagyobb feszültség, amelynél a test még rugalmasan viselkedik, ezt a σ_h feszültséget a *rugalmasság határának* nevezik.
A feszültség további növelésekor az alakváltozás nem rugalmas, a feszültség megszűnése után az eredeti hossz már nem áll vissza. Ha például az ábrán látható *C* pontban a feszültséget megszűntetjük, akkor a deformáció nem szűnik meg, a test hossza visszafordíthatatlanul megváltozik, *maradó alakváltozás*, más néven *plasztikus deformáció* jön létre.
Anélkül, hogy részletekbe mennénk, megemlítjük, hogy a plasztikus deformáció mechanizmusának megértéséhez az anyag atomos szerkezetének ismeretére van szükség, mivel a plasztikus deformáció szoros kapcsolatban van az atomi szerkezetben jelenlévő és a deformáció során keletkező szerkezeti hibákkal. A deformáció során az anyagban a hibák száma egyre nő, végül a megnyújtott test elszakad (*D* pont). A szakadáshoz tartozó feszültség (σ_{sz}) az anyag *szakítási szilárdsága*.